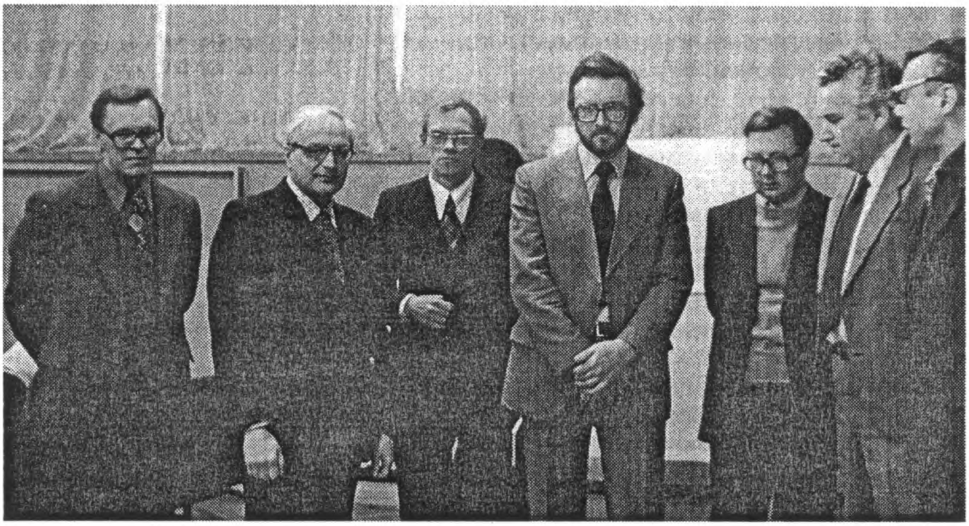

Академик Н. Н. Красовский со своими учениками и коллегами.
На фотографии (слева направо): Ю. С. Осипов, Н. Н. Красовский, В. Е. Третьяков, М. И. Гусев, А. Б. Куржанский, В. Д. Фурасов, Г. С. Шелементьев

Н. Н. Красовский,
А. Н. Котельникова

СУДЬБА ОДНОГО ПОДХОДА К ИЗУЧЕНИЮ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

В 1977 году в издательстве Springer-Verlag была опубликована монография американского математика Дж. Хейла (Jack Hale) «Теория функционально-дифференциальных уравнений» [1]. Книга посвящена математической теории *наследственных* систем. Такие системы принято еще называть системами с *последействием,* или системами с *запаздыванием* времени.

Удобно сначала обратиться к этой книге, поскольку, согласно редактору ее русского перевода А. Д. Мышкису, к тому времени: «Ни в какой другой книге теория функционально-дифференциальных уравнений не представлена столь разносторонне, причем на современном уровне».

Процитируем вводные суждения Дж. Хейла: «Во многих приложениях предполагается, что... будущее состояние системы не зависит от прошлых состояний и определяется только настоящим. Если к тому же предполагается, что система подчиняется уравнению, содержащему переменные состояния и скорости их изменения, то, как правило, мы приходим либо к обыкновенным дифференциальным уравнениям, либо к уравнениям в частных производных. Однако при более тщательном изучении часто становится очевидным, что... более реалистичная модель должна включать некоторые из предшествующих состояний системы... Это было известно и ранее, но теория систем с запаздыванием начала интенсивно развиваться только в последнее время». Автор перечисляет некоторые классические результаты из прошлого, посвященные отдельным вопросам математической теории систем с последействием. Прежде всего, это исследования биологической модели «хищник – жертва» и модели вязкоупругости, выполненные Вольтерра (Volterra, 1928), и работы Минорского (Minorsky, 1942) о стабилизации курса корабля. Затем обсуждаются разнообразные прикладные задачи, приводящие к классам рассматриваемых уравнений. Это задачи из физики, электротехники, экономики, биологии, медицины, теории чисел... И далее: «При таких ясных указаниях на важность наследственных систем в приложениях и на большое количество интересных математических задач, возникающих в связи с этими системами, неудивительно, что их теория быстро развивалась за последние двадцать пять лет. Новые приложения продолжают возникать и требуют изменений (или даже определения заново) основных уравнений... В конце 40-х – начале 50-х годов появилось несколько книг, в которых излагалось текущее состояние предмета и которые, безусловно, оказали огромное влияние на последующие работы... А. Д. Мышкис (1949) ввел общий класс уравнений с запаздывающими аргументами и заложил основы общей теории линейных систем. В своей монографии, выполненной в Rand Corporation, Bellman и Danskin (1954) указали на широкую применимость уравнений, содержащих информацию о прошлом, в таких областях, как биология и экономика. Они также изложили хорошо построенную теорию линейных уравнений с постоянными коэффициентами и начала теории устойчивости. Наиболее интенсивное развитие этих идей содержится в книге Bellman, Cooke (1959, 1963)». В этом обзоре, отдавая дань исследованиям, проводимым в СССР, Дж. Хейл акцентирует внимание на подходе к проблемам устойчивости для систем с последействием, предложенном на Урале. Резюме о *вчера* и *сегодня* этого подхода и предлагается здесь в ответ на любезное предложение редакции журнала.

В послевоенные годы в Свердловске развернулись интенсивные исследования по качественной теории дифференциальных уравнений, по теории устойчивости движения и теории нелинейных колебаний. Во главе этих исследований стояли выдающиеся ученые Евгений Алексеевич Барбашин (УПИ) и Иоэль Гильевич Малкин (УрГУ). Вернувшийся из столичной докторантуры Е. А. Барбашин был проводником характерных примет Московской математической школы, в том числе качественной теории дифференциальных уравнений в духе Пуанкаре с акцентом на абстрактную теорию динамических систем. И. Г. Малкин был ярким представителем тех исследований в Казанской школе по математике и механике, которые восходили к конструктивным идеям Ляпунова и Пуанкаре в теории устойчивости движения и в теории нелинейных колебаний. Высокий класс этих ученых, их дружелюбный контакт, энергия и благожелательное отношение к молодежи определили продуктивное своеобразие Уральской школы в обсуждаемой области математики и механики. Ее мэтрам, среди других достижений, уже принадлежали фундаментальные результаты в развитии метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Это определяло особый интерес и самих мэтров и их учеников к дальнейшим исследованиям в названной области. Выискивались пути модернизации, которые бы соответствовали запросам актуальной практики, определяли бы новые постановки проблем и базировались бы на нетрадиционных классах уравнений.

Знакомство с работами А. Д. Мышкиса [2] инициировало интерес к качественной теории дифференциальных уравнений с запаздываниями времени и особенно – к проблемам устойчивости движений в описываемых такими уравнениями системах с последействием. Свердловским апологетам метода функций Ляпунова был брошен вызов высказываниями Л. Э. Эльсгольца [3], сотрудника Анатолия Дмитриевича. Лев Эрнестович сомневался в возможностях названного метода в приложении к наследственным системам. Ответом на эти сомнения послужил подход к проблеме, который выходил за рамки *конечномерного* пространства меняющихся во времени *мгновенных* состояний системы и формализовал эволюцию системы как *движения* в *бесконечномерном* пространстве *историй*, складывающихся к текущим моментам времени. Это определило переход от *функций* **Ляпунова** от мгновенных состояний системы к *функционалам* **Ляпунова** на историях ее движения.

Неожиданно быстрое признание этого подхода обусловилось, по-видимому, тем, что абстрактный аппарат, который годился для развития предложенной трактовки наследственных систем, уже содержался в анналах фундаментальной математики. Требовалось лишь интерпретировать соответствующие фундаментальные понятия и конструкции в форме конкретных понятий и конструкций, удобных для развиваемой теории устойчивости наследственных систем. Разумеется, при этом требовалась и доработка общих понятий и методов с учетом специфики изучаемых систем. Такое развитие обсуждаемой концепции в теории наследственных систем, начавшееся в то время, продолжается и по сей день.

Параллельно, хотя, может быть, чуть позже, развитие подобной трактовки движений наследственных систем в форме эволюции их историй и соответствующее развитие метода функционалов Ляпунова было начато и затем успешно развивалось японским математиком T. Yoshizawa [4].

Конкретизируем сказанное. Обратимся сначала к классической концепции Ляпунова устойчивости движения обыкновенной динамической системы [5–7]. Предполагается, что мгновенное состояние такой системы в текущий момент времени t определяется *фазовым* n-мерным **вектором** $x[t]$. Слова «$x = \{x_1,\dots,x_n\}$ – есть фазовый вектор» означают, что известное в момент t значение $x[t]$ *однозначно* определяет скорость изменения $x[t]$ – *производную* по времени $\dot{x}[t]$. Формально это выражается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t]). \qquad (1)$$

Например, свободная материальная точка в стационарном гравитационном поле имеет шестимерный фазовый вектор: {три координаты *места* и три проекции *скорости* на оси стационарной системы координат}. В простейшей задаче «хищник и жертва» – двумерный фазовый вектор: $x = \{x_1, x_2\}$, {x_1 – живая *масса* совокупности хищников, x_2 – съедобная *масса* жертв}.

Ставится *общая задача об устойчивости* [5] конкретного *невозмущенного* движения $x^{(0)}[t]$ относительно других – *возмущенных* – движений $x[t]$. Содержательно: пусть возмущение случилось в момент t_*; невозмущенное движение *устойчиво по Ляпунову*, если текущее возмущение $x[t] - x^{(0)}[t]$ все время при $t \geq t_*$ остается *малым* при *достаточно малом* начальном возмущении $x[t_*]$. Формальное определение: В пространстве X векторов x выбирается система координат, в которой невозмущенное движение удовлетворяет равенству $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$ при всех возможных значениях t. Символ $\overline{0}$ обозначает вектор $x = \{x_i = 0,\ i = 1,...,n\}$. Движение $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$ *устойчиво*, если для любой наперед выбранной окрестности («ε –окрестности»): $|x| < \varepsilon$ движения $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$ и для любого момента t_* начального возмущения можно выбрать столь малое число $\delta_* > 0$, что при всяком начальном возмущении $x[t_*]$, удовлетворяющем условию $|x[t_*]| \leq \delta_*$, возмущенное движение $x[t]$ будет оставаться в заданной ε–окрестности, т. е. будет выполнено неравенство: $|x[t]| < \varepsilon,\ t_* \leq t < \infty$. Если при этом будет еще выполняться условие $x[t] \to \overline{0}$ при $t \to \infty$, то устойчивость называется *асимптотической*. Символ $|x|$ обозначает модуль вектора x – его *евклидову* **норму** $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$.

Идея «*второго* **метода**» – метода *функций* **Ляпунова** такова. Каждая возможная **позиция** $\{t, x\}$ оценивается *числом* v при помощи функции $v = v(t, x)$, $v(t, \overline{0}) = 0$, $-\infty < t < \infty$. Если функция $v(t, x)$ удовлетворяет в окрестности движения $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$ *подходящим*(!) условиям, то невозмущенное движение оказывается устойчивым или даже асимптотически устойчивым, или неустойчивым.

Вообще, оценка *одним* **числом** многомерного текущего состояния сложной системы при изучении ее эволюции является с незапамятных времен популярным приемом в самых разнообразных областях науки и практики. Например, в элементарной математической теории шахматной игры достоинство текущей позиции тоже оценивается числом. И в рамках этой теории выбранные стратегия и тактика хороши, если диктуемый ими очередной ход не уменьшает оценку для получающейся позиции.

Ляпунов чрезвычайно удачно выбрал условия для функций $v(t,x)$ в приложении к задачам устойчивости. Эти условия удачны *в принципе*. Теоремы, базирующиеся на функциях Ляпунова $v(t,x)$, дают *достаточные* условия устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости. Однако выбранные Ляпуновым свойства функций $v(t,x)$ имеют и характер *необходимости*. Для задач, которые на самом деле интересны («по науке» или «практически»), в случаях устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости *существуют* функции, обладающие как раз выбранными Ляпуновым свойствами [5–10]. Более того, предложенные Ляпуновым классы функций $v(t,x)$ хороши и *конструктивно*. Он указал пути аналитического построения *подходящих* функций $v(t,x)$ для важнейших задач устойчивости, прежде всего для задач из механики. Формальные определения: Если в окрестности невозмущенного движения функция $v(t,x)$ *определенно-положительна:*

$$v(t,x) \geq w_*(|x|) \tag{2}$$

и производная $\dot{v}[t]$ функции $v[t] = v[t,x[t]]$ вдоль движения $x[t]$ *неположительна:* $\dot{v}[t] \leq 0$, то движение $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$ *устойчиво*. Если к тому же производная $\dot{v}[t]$ *определенно-отрицательна:*

$$\dot{v}[t] \leq -w(|x[t]|) \tag{3}$$

и функция $v(t,x)$ допускает *бесконечно малый высший предел*

$$v(t,x) \leq w^*(|x|), \tag{4}$$

то движение $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$ *устойчиво асимптотически.*

Здесь функции $w_*(|x|)$, $w(|x|)$, $w^*(|x|)$ *непрерывны* и удовлетворяют условиям

$$w_*(|x|) > 0,\ w(|x|) > 0,\ w^*(|x|) > 0,\ w(\overline{0}) = w_*(\overline{0}) = w^*(\overline{0}) = 0\,. \quad (5)$$

Акцентируем внимание на том, что переменная во времени t функция $v[t] = v[t, x[t]]$ должна изменяться вдоль возмущенного движения $x[t]$ *монотонно*: в случае устойчивости – не возрастать, асимптотической устойчивости – убывать. При этом другие – «геометрические» – свойства функции $v(t,x)$ таковы, что при существенном удалении состояния x от $\overline{0}$ функция $v(t,x)$ должна возрастать. Поэтому невозрастание функции $v[t] = v[t, x[t]]$ вдоль движения $x[t]$ при возрастании времени исключает сильное удаление этого движения $x[t]$ от движения $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$; более того, убывание функции $v[t] = v[t, x[t]]$ со временем направляет движение $x[t]$ к движению $x^{(0)}[t] \equiv \overline{0}$. Проверка монотонного изменения функции $v[t] = v[t, x[t]]$ в классическом случае *конструктивна.* Эта монотонность определяется знаком *производной* $\dot{v}[t]$ по времени, которая вычисляется как производная сложной функции по известной формуле:

$$\dot{v}[t] = \left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i[t] \right)_{x = x[t]}, \quad (6)$$

где производные $\dot{x}_i[t]$ – компоненты вектора $x[t]$ из (1).

В задачах механики роль функций $v(t,x)$ часто играют интегралы движения, в частности *энергия.*

Вернемся к системам с *последействием.* Предполагаем, что *мгновенное* состояние системы в текущий момент времени t определяется опять *конечномерным* вектором $x[t]$. Для определенности рассмотрим систему с *наследственной* **памятью**, время сохранения которой ограничено числом $h > 0$. Вектор x не является теперь фазовым вектором в определенном выше смысле. Предполагать, что значение $x[t]$ определяет однозначно скорость $\dot{x}[t]$ изменения $x[t]$ уже нельзя. Ибо предполагается, что эта скорость $\dot{x}[t]$ зависит и от *некоторых* (а может быть, и от *всех!*) значений $x[\tau]$ при $t-h \le \tau \le t$.

Но при этом предполагается, что *вся история* движения продолжительности h, т. е. отрезок движения ($x[\tau]$, $t-h \le \tau \le t$) уже *однозначно* определяет значение $\dot{x}[t]$. Формально это выражается векторным дифференциальным уравнением с последействием:

$$\dot{x}[t] = F(t,(x[\tau],t-h \le \tau \le t)). \tag{7}$$

Поэтому в качестве *фазового* **элемента**, реализующегося в момент времени t, целесообразно выбрать именно *историю* ($x[\tau]$, $t-h \le \tau \le t$), сложившуюся к этому моменту t. Тогда *эволюция* рассматриваемой системы определяется «движениями» в *модернизированном* фазовом пространстве X_h, которое является совокупностью возможных *историй* «обыкновенных» движений. Историю ($x[\tau]$, $t-h \le \tau \le t$) будем обозначать символом $x_t(\tau)$. Теперь представляется естественным следующее развитие второго метода Ляпунова для систем с последействием. Вместо *функции* $v = v(t,x)$, которая в классическом случае оценивает «обыкновенную» **позицию** $\{t,x\}$, выбирается *функционал* **Ляпунова** $V(t,x_t(\tau))$, $V(t,x_t^{(0)}(\tau)) = 0$, $-\infty < t < \infty$, который оценивает *числом* $V[t] = V(t,x_t(\tau))$ каждое возможное «историческое» **состояние** $\{t,x_t(\tau)\}$. Проблема сводится к перенесению свойств *функций* **Ляпунова** на *подходящие* свойства *функционалов* **Ляпунова** [1, 4, 10, 11].

Мысль о таком развитии метода Ляпунова представляется *тривиальной*(!?). Однако на деле выбор *подходящих* свойств для функционалов $V(t,x_t(\tau))$ в случае *бесконечномерного фазового* **пространства** историй X_h оказывается уже не совсем тривиальным. В самом деле, история $x_t(\tau)$ есть *функция* от аргумента τ на отрезке $[\,t-h;\ t\,]$. Надлежит выбрать удобный класс таких функций. Оказывается естественным выбор *непрерывных* функций. И надо выбрать *метрику*, которая оценивает отклонение истории одного движения от истории другого. В классическом случае отклонение мгновенных значений $x^{[1]}[t]$ и $x^{[2]}[t]$ друг от друга для разных движений оценивается просто евклидовым расстоянием

$\left|x^{[1]}[t]-x^{[2]}[t]\right|$. Для непрерывных историй $x_t^{[1]}(\tau)$ и $x_t^{[2]}(\tau)$ отклонение одной от другой естественно оценивать нормой $\|...\|_C$, которая определяется как *максимум* евклидова расстояния $\left|x^{[1]}[\tau]-x^{[2]}[\tau]\right|$ между *прошлыми мгновенными* состояниями $x^{[1]}[\tau]$ и $x^{[2]}[\tau]$ вдоль *всей* истории:

$$\left\|(x_t^{[1]}(\tau)-x_t^{[2]}(\tau))\right\|_C=\max_{t-h\le\tau\le t}\left|x^{[1]}[\tau]-x^{[2]}[\tau]\right|. \tag{8}$$

На этой основе классическая концепция устойчивости трансформируется для систем с последействием так, что невозмущенное движение $x^{(0)}[t]\equiv\overline{0}$ заменяется на невозмущенную эволюцию истории $x_t^{(0)}(\tau)$, где $x_t^{(0)}(\tau)=(x_t^{(0)}[\tau]=\overline{0};\ t-h\le\tau\le t),\ t_*\le t<\infty$; начальное мгновенное возмущение $x[t_*]$ заменяется начальной возмущенной историей $x_{t_*}(\tau)$, текущее состояние $x[t]$ – текущей историей $x_t(\tau),\ t_*\le t<\infty$. Оценки мгновенных состояний $x[t]$ по модулю $|x[t]|$ заменяются оценками историй $x_t(\tau)$ через их норму (8).

Это *трюизмы*. Их развитие в действенную теорию обусловлено переходом к строгой математической формализации – *абстрактной*, однако не уводящей от пользы для *приложений*. Конкретизируем сказанное на примере некоторых аспектов. В обыкновенном случае содержательная теория устойчивости, включающая асимптотическую устойчивость, получается в предположении хотя бы только о *непрерывной* зависимости правой части в (1) от позиции $\{t,x\}$. В случае последействия, если предполагать только «простую» *непрерывную* зависимость правой части $F(t,(x[\tau],t-h\le\tau\le t))=F(t,x_t(\tau))$ в (7) от состояния $\{t,x_t(\tau)\}$, то возникают неудобства. Может случиться дурная наследственность, порождающая бурно *осциллирующее* движение $x[t]$, которое не сможет преодолеть конечный временный барьер $t^*<\infty$, будет бушевать в ограниченной области $|x|<M$, $t_*\le t<t^*$ и не сможет *устойчиво примкнуть* к невозмущенному движению. (Явление нередкое в приложениях поспешных экономических теорий к реальным социальным системам с последействием в случаях, когда эти теории не учитывают специфику зависимости эволюции системы от *нерегулярной*(!) истории.) Поэтому в случае последействия

требования к правой части в (7) усиливаются до условия *вполне непрерывности* [1] от $\{t, x_t(\tau)\}$. Содержательно строгое математическое дополнение «вполне» как раз исключает сколь угодно большие значения скоростей $\dot{x}[t]$, порождаемых историями $x_t(\tau)$ из области $\|x_t(\tau)\|_C < M$, $t_* < t < t^*$.

В предположении о *вполне непрерывности* $F(t, x_t(\tau))$ получается уже содержательная теория устойчивости для систем с последействием с приложением к ней метода функционалов Ляпунова. Например, тогда справедливо следующее утверждение.

Пусть функционал $V(t, x_t(\tau))$ определен на состояниях $\{t, x_t(\tau)\}$ из окрестности невозмущенных состояний $\{t, x_t^{(0)}(\tau)\}$ и *непрерывен* по $\{t, x_t(\tau)\}$. Пусть этот функционал удовлетворяет таким же условиям, как и функция $v(t, x[t])$ в классической теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости [5], с той только разницей, что оценки (2)–(5) для $v(t, x[t])$ по модулю $|x[t]\|$ заменяются аналогичными оценками для $V(t, x_t(\tau))$ по норме $\|x_t(\tau)\|_C$, и в (3) производная $\dot{v}[t]$ функции $v = v(t, x[t])$ вдоль движения $x[t]$ заменяется на *правую верхнюю производную* [1, 4, 10, 11]

$$\dot{V}^+(t, x_t(\tau)) = \overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \frac{V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\tau)) - V(t, x_t(\tau))}{\Delta t} \tag{9}$$

функционала $V(t, x_t(\tau))$ вдоль эволюционирующей истории $x_t(\tau)$. Тогда невозмущенная эволюция истории $x_t^{(0)}(\tau)$, $t_* \le t < \infty$ *асимптотически устойчива* относительно возмущенных эволюций историй $x_t(\tau)$ *равномерно* по моменту t_*, по начальной возмущенной истории $x_{t_*}(\tau)$ и по текущей возмущенной истории $x_t(\tau)$, $t_* \le t < \infty$.

Известны и возможны многие модификации подобных *общих* критериев устойчивости. Однако для решения конкретных задач надо уметь *конструировать* подходящие функционалы V. По аналогии с обыкновенным случаем [5–7] естественно было начать такую работу с *линейных* дифференциальных уравнений с последействием с неизменными параметрами.

И тогда получил признание «уральский вариант» – предложение трактовать эволюцию наследственной линейной стационарной системы как *однопараметрическую полугруппу T* преобразований в фазовом пространстве X_h историй [1,10]. Эта полугруппа T удобно конкретизируется в общей фундаментальной теории полугрупп [12]. Тогда обыкновенное дифференциальное уравнение (1) трансформируется в *дифференциальный производящий* оператор A_T полугруппы T. Это определило абстрактно *прозрачное* и практически *конструктивное* развитие теории устойчивости Ляпунова по *первому приближению* для систем с последействием. А затем – развитие Сергеем Никаноровичем Шимановым [13] конструктивной теории и *критических* случаев устойчивости для таких систем. Изучая полугруппу T, примерно в одно и то же время С. Н. Шиманов [14] и Дж. Хейл [1] описали ее строение в эффективной форме *расслоения* совокупности всех историй из X_h на классы по признаку *устойчивости*.

В классической теории устойчивости в обыкновенном случае особенную роль играют функции Ляпунова $v(t,x)$ – *квадратичные* **формы** от координат фазового вектора x. Эффективность обсуждаемой концепции устойчивости наследственных систем в большой мере определилась возможностью *конструктивной* трансформации *квадратичных* **функций** $v(t,x)$ в *квадратичные* **функционалы** $V(t,x_t(\tau))$ [1, 4, 10, 11, 15–17]. Знаменательно и *естественно* (!), что при работе с квадратичными функционалами Ляпунова оказалось целесообразным использовать разнообразные метрики в пространстве X_h историй. Особенно удобными оказались бесконечномерные *аналоги евклидовой* **метрики**. За прошедшие годы разными исследователями было построено много разных модификаций квадратичных функционалов Ляпунова.

Известен в принципе безотказный способ аналитического построения подходящих квадратичных функционалов V для линейных систем с последействием. А в случае стационарной системы этот способ сводится даже к некоторой канонической конструктивной процедуре. Однако способ этот весьма трудоемкий и требует знаний и навыков из математики, приятных не для всех. Вероятно поэтому подавляющая доля случившихся построений квадратичных функционалов Ляпунова V для систем с последействием по сути дела только так или иначе варьирует первоначальную *интуитивно* найденную «кустарную» конструкцию: V={функция $v(t,x)$, *по догадке* (!?) подходящая для исследования устойчивости вспомогательной обыкновенной системы, + добавка в виде некоторого интеграла, компенсирующая эффект последействия} [10].

Конструктивность обсуждаемого метода исследования устойчивости систем с последействием улучшается, если удается сформулировать *достаточные* условия, которые обеспечивают нужные свойства эволюции системы, но такие, что выполнение этих достаточных условий не требуется для всех возможных возмущенных историй из окрестности невозмущенной истории, а только – для некоторой *части* этих историй. Среди многих предложений критериев устойчивости такого рода заслуживает признания идея Б. С. Разумихина [18]. Борис Сергеевич предложил не обращаться к функционалам *общего* вида, а ограничиться лишь обыкновенными функциями $v(t,x)$, и в случае *устойчивости* наряду с условием (2) потребовать, чтобы производная $\dot{v}[t]$ функции $v[t]=v[t,x[t]]$ вдоль возмущенного движения $x[t]$ была *неположительна* лишь при условии, что история $x_t(\tau)=(x[\tau],t-h\le\tau\le t)$ удовлетворяет неравенству:

$$v(\tau,x[\tau])\le v(t,x[t]),\ \ t-h\le\tau\le t. \tag{10}$$

А для *асимптотической устойчивости* наряду с условиями (2), (4) потребовать *определенной отрицательности* производной (3) тоже только для историй $x_t(\tau)$, удовлетворяющих неравенству (10). Иначе говоря, желательное свойство производной $\dot{v}[t]$ должно выполняться хотя бы только для таких историй, для которых оценка функцией $v(t,x)$ прошлых мгновенных состояний $x[\tau]$ не превышает оценки этой функцией $v(t,x)$ текущего состояния $x[t]$. В исходной работе [18] утверждение об устойчивости в системе с последействием было доказано описанным выше способом при условиях определенной *регулярности* функции $v(t,x)$ и правой части в уравнении (7). Однако подобный критерий устойчивости справедлив в общем случае уже в классе хотя бы только *непрерывных* функций $v(t,x)$ и при условии хотя бы лишь *вполне непрерывности* правой части в уравнении (7).

Но было установлено, что в отличие от теоремы об устойчивости с условием (10) утверждение об асимптотической устойчивости при таком условии (10) верно лишь при весьма *обязывающих* требованиях к свойствам уравнения (7) и к функции $v(t,x)$. Да к тому же корректная проверка уточненного так утверждения об асимптотической устойчивости требует специальных усилий. Но можно [1, 4, 10] сделать *«микроскопическое»* изменение условия (10), заменив его на условие:

$$v(\tau,x[\tau])\le \rho(v(t,x[t])),\ \ t-h\le\tau\le t, \tag{11}$$

и заменить требование *определенной отрицательности* производной $\dot{v}[t]$ на историях $x_t(\tau)$ (10) требованием *определенной отрицательности* правой верхней производной $\dot{v}^{+}[t]$ для историй $x_t(\tau)$ (11). Здесь $\rho(v)$ – какая угодно *непрерывная возрастающая* функция, удовлетворяющая условиям $\rho(0)=0$; $\rho(v)>v$, $v>0$. Тогда асимптотическая устойчивость устанавливается уже для класса хотя бы только *непрерывных* функций $v(t,x)$ при *вполне непрерывной* правой части в уравнении (7).

Акцент здесь на эти сугубо математические детали вызван, однако, принципиальными соображениями. Ибо явления, подобные рассмотренному сейчас, проявляются в самых разнообразных задачах. Жесткая формализация условий в исходной проблеме затрудняет ее корректное решение с желаемым качеством. Однако *смягчая* «бесконечно мало» формализацию проблемы, можно обеспечить *строгое* решение задачи, которое сохраняет *содержательную* ценность желаемого решения.

Не будем полемизировать о том, что лучше – использовать для исследования устойчивости в системах с последействием функционалы Ляпунова *общего вида* – универсальное, но трудоемкое средство или обратиться к менее универсальному, но зато более привычному средству – к *частному виду* функционалов V – к функциям Ляпунова v. Отметим только один любопытный факт.

Рассмотрим линейную стационарную систему с последействием. Допустим, что для нее найдется квадратичная функция $v(x)$, которая при условиях (2)–(5), (10) или (11) обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x^{(0)}[t]\equiv\overline{0}$. Тогда *стандартно* строится квадратичный функционал $V(x_t(\tau))$, который тоже обеспечивает эту асимптотическую устойчивость. Доказать обратное утверждение в более или менее общем случае, хотя бы только для линейной стационарной системы с последействием, не удается.

Подчеркнем, что вообще одной из кардинальных примет свердловских (екатеринбургских) исследований нетрадиционных эволюционных систем, как это характерно и для других центров аналогичных исследований, является выход в модернизированные фазовые пространства, нередко экзотические. И при этом особенное внимание уделяется возможности интерпретировать эволюцию изучаемой системы как конкретизацию фундаментальных математических закономерностей и притом сочетать строгость абстракций с конструктивным выходом к приложениям. Ограничимся здесь упоминанием только о развитии на Урале и в других центрах рассмотренного в этой статье подхода к системам с последействием на более широкие классы таких систем – на стохастические системы – обыкновенные и наследственные [19–22].

---

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М., 1984.

2. *Мышкис А. Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. 1949. Т. 4, вып. 5 (33). С. 99–141.

3. *Эльсгольц Л. Э.* Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений // Успехи математических наук. 1954. Т. 9, вып. 4.

4. *Yoshizawa T.* Stability theory by Liapunov's Second Method. Math.Soc. Japan, 1966.

5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.

6. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. 2-е изд. М.; Л., 1956.

7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.; Л., 1952.

8. *Барбашин Е. А.* Метод сечений в теории динамических систем // Матем. сб. 1951. Т. 29, вып. 2.

9. *Massera J. L.* On Liapounoffs condition of stability // Annals of Mathematics. 1949. T. 50, № 3.

10. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

11. *Ким А. В.* i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург, 1996.

12. *Хилл Э.* Функциональный анализ и полугруппы. М., 1951.

13. *Шиманов С. Н.* Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24 (3). С. 447–457.

14. *Шиманов С. Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1 (1). С. 102–116.

15. *Красовский Н. Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26.

16. *Репин Ю. М.* Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 3.

17. *Колмановский В. Б.* Об устойчивости некоторых систем с произвольным последействием // Докл. Академии наук. 1993. Т. 331, № 4.

18. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. С. 500–512.

19. *Кац И. Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург, 1998.

20. *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление: Пер. с англ. М., 1969.

21. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969.

22. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.